2024年普通高等学校招生全国统一考试

数　学

本试卷共4页，22小题，满分150分。考试用时120分钟。

注意事项：1．答题前，请务必将自己的姓名、准考证号用黑色字迹的签字笔或钢笔分别填写在试题卷和答题卡上。用2B铅笔将试卷类型（A）填涂在答题卡相应位置上。将条形码横贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”。

2．作答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案，答案不能答在试卷上。

3．非选择题必须用黑色字迹钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答的答案无效。

4．考生必须保持答题卡的整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本大题共8小题，每小题5分，共计40分．每小题给出的四个选项中，只有一个选项是正确的．请把正确的选项填涂在答题卡相应的位置上．

1．已知集合 $A=\{x\,|\,-5<x^3<5\}$， $B=\{-3,-1,0,2,3\}$，则 $A\cap B=$

A．$\{-1,0\}$　　B．$\{2,3\}$　　C．$\{-3,-1,0\}$　　D．$\{-1,0,2\}$

2．若 $\dfrac{z}{z-1}=1+\mathrm{i}$，则 $z=$

A．$-1-\mathrm{i}$　　B．$-1+\mathrm{i}$　　C．$1-\mathrm{i}$　　D．$1+\mathrm{i}$

3．已知向量 $\boldsymbol{a}=(0,1)$， $\boldsymbol{b}=(2,x)$，若 $\boldsymbol{b}\perp(\boldsymbol{b}-4\boldsymbol{a})$，则 $x=$

A．-2　　B．-1　　C．1　　D．2

4．已知 $\cos(\alpha+\beta)=m$， $\tan\alpha\tan\beta=2$，则 $\cos(\alpha-\beta)=$

A．$-3m$　　B．$-\dfrac{m}{3}$　　C．$\dfrac{m}{3}$　　D．$3m$

5．已知圆柱和圆锥的底面半径相等，侧面积相等，且它们的高均为 $\sqrt{3}$，则圆锥的体积为

A．$2\sqrt{3}\pi$　　B．$3\sqrt{3}\pi$　　C．$6\sqrt{3}\pi$　　D．$9\sqrt{3}\pi$

6．已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2-2ax-a, x<0,\\ \mathrm{e}^x+\ln(x+1), x\geqslant 0\end{cases}$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，则 a 的取值范围是

A．$(-\infty,0]$　　B．$[-1,0]$　　C．$[-1,1]$　　D．$[0,+\infty)$

7．当 $x \in [0,2\pi]$ 时，曲线 $y = \sin x$ 与 $y = 2\sin(3x - \frac{\pi}{6})$ 的交点个数为

A．3　　　B．4　　　C．6　　　D．8

8．已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(x) > f(x-1) + f(x-2)$，且当 $x < 3$ 时，$f(x) = x$，则下列结论中一定正确的是

A．$f(10) > 100$　　　B．$f(20) > 1\,000$　　　C．$f(10) < 1\,000$　　　D．$f(20) < 10\,000$

二、选择题：本大题共 3 小题，每小题 6 分，共计 18 分．每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对得 6 分，选对但不全的得部分分，有选错的得 0 分。

9．为了解推动出口后的亩收入（单位：万元）情况，从该种植区抽取样本，得到推动出口后亩收入的样本均值 $\bar{x} = 2.1$，样本方差 $s^2 = 0.01$，已知该种植区以往的亩收入 X 服从正态分布 $N(1.8, 0.1^2)$，假设推动出口后的亩收入 Y 服从正态分布 $(\bar{x}, s^2)$，则（若随机变量 Z 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$，则 $P(Z < \mu + \sigma) \approx 0.8413$）

A．$P(X > 2) > 0.2$　　　B．$P(X > 2) < 0.5$

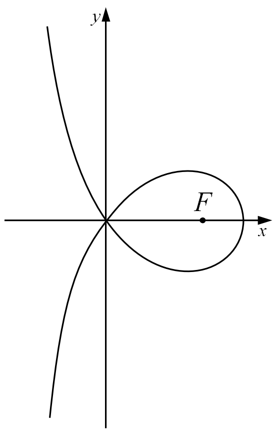
C．$P(Y > 2) > 0.5$　　　D．$P(Y > 2) < 0.8$

10．设函数 $f(x) = (x-1)^2(x-4)$，则

A．$x = 3$ 是 $f(x)$ 的极小值点　　　B．当 $0 < x < 1$ 时，$f(x) < f(x^2)$

C．当 $1 < x < 2$ 时，$-4 < f(2x-1) < 0$　　　D．当 $-1 < x < 0$ 时，$f(2-x) > f(x)$

11．造型  可以做成美丽的丝带，将其看作图中曲线 C 的一部分．已知 C 过坐标原点 O，且 C 上的点满足横坐标大于 -2，到点 $F(2,0)$ 的距离与到定直线 $x = a(a < 0)$ 的距离之积为 4，则



A．$a = -2$

B．点 $(2\sqrt{2}, 0)$ 在 C 上

C．C 在第一象限的点的纵坐标的最大值为 1

D．当点 (x_0, y_0) 在 C 上时，$y_0 \leqslant \frac{4}{x_0 + 2}$

三、填空题：本大题共 3 小题，每小题 5 分，共计 15 分．

12．设双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左右焦点分别为$F_1$，$F_2$，过$F_2$作平行于$y$轴的直线交$C$于$A$、$B$两点，若$|F_1A|=13$，$|AB|=10$，则$C$的离心率为__________．

13．若曲线在点$(0,1)$处的切线也是曲线$y=\ln(x+1)+a$的切线，则$a=$__________．

14．甲乙两人各有四张卡片，每张卡片上标有一个数字，假的卡片上分别标有数字 1，3，5，7，乙的卡片上分别标有数字 2，4，6，8．两人进行四轮比赛，在每轮比赛中，两人各自从自己持有的卡片中随机选一张，并比较所选卡片上的数字大小，数字大的人得 1 分，数字小的人得 0 分，然后各自弃置此轮所选的卡片（弃置的卡片在此后的轮次中不能使用），则四轮比赛后，甲的总得分不小于 2 的概率为__________．

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15．（13 分）

记△ABC的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知$\sin C=\sqrt{2}\cos B$，$a^2+b^2-c^2=\sqrt{2}ab$．

（1）求B；

（2）若△ABC的面积为$3+\sqrt{3}$，求c．

16．（15 分）

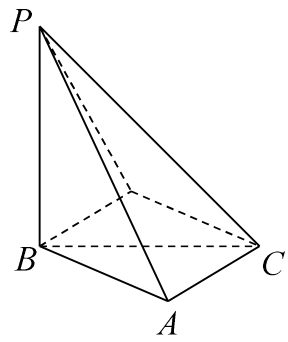
已知$A(0,3)$和$P(3,\dfrac{3}{2})$为椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上两点．

（1）求C的离心率；

（2）若过P的直线l交C于另一点B，且△ABP的面积为 9，求l的方程．

17.（15 分）

如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$ 底面 $ABCD$，$PA=AC=2$，$BC=1$，$AB=\sqrt{3}$.



（1）若 $AD\perp PB$，证明：$AD\parallel$ 平面 PBC；

（2）若 $AD\perp DC$，且二面角 $A-CP-D$ 的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{42}}{7}$，求 AD.

18.（17 分）

已知函数 $f(x)=\ln\dfrac{x}{2-x}+ax+b(x-1)^3$.

（1）若 $b=0$，且 $f'(x)\geqslant 0$，求 a 的最小值；

（2）证明：曲线 $y=f(x)$ 是中心对称图形；

（3）若 $f(x)>-2$ 当且仅当 $1<x<2$，求 b 的取值范围.

19.（17 分）

设 m 为正整数，数列 a_1，a_2，…，a_{4m+2} 是公差不为 0 的等差数列，若从中删去两项 a_i 和 a_j $(i<j)$ 后剩余的 $4m$ 项可被平均分为 m 组，且每组的 4 个数都能构成等差数列，则称数列 a_1，a_2，…，a_{4m+2} 是 (i,j)—可分数列 .

（1）写出所有的 (i,j)，$1\leqslant i<j\leqslant 6$，使得数列 a_1，a_2，…，a_6 是 (i,j)—可分数列；

（2）当 $m\geqslant 3$ 时，证明：数列 a_1，a_2，…，a_{4m+2} 是 $(2,13)$—可分数列；

（3）从 1，2，…，$4m+2$ 中一次任取两个数 i 和 j $(i<j)$，记数列 a_1，a_2，…，a_{4m+2} 是 (i,j)—可分数列 的概率为 P_m，证明：$P_m>\dfrac{1}{8}$.